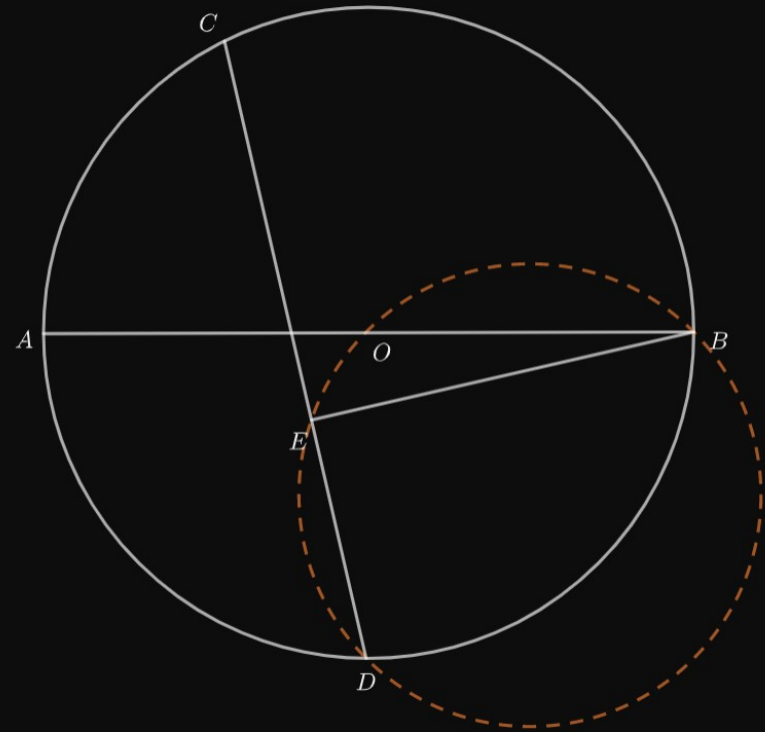
Doubt Yourself

Italian Mathematical Olympiad 2023
Problem 4

André Pinheiro

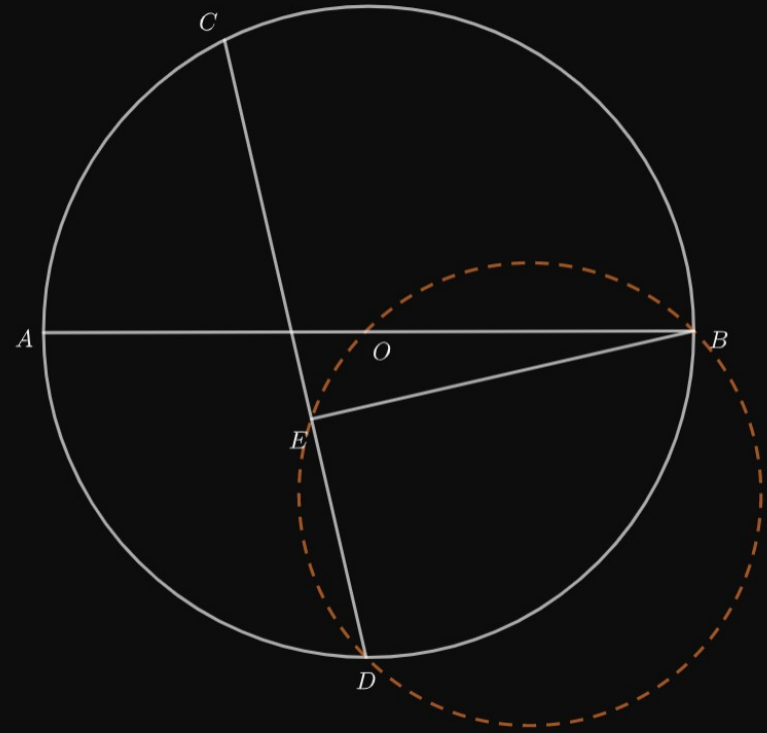
Maio de 2023

Problema 4: Fique-se um ponto C numa circunferência de centro O e de diâmetro AB, com C distinto de A e B. Agora seja D que varie pelos pontos do arco AB não contendo C e que seja distinto de A e B. Dado D, seja E o ponto do segmento CD tal que CD e BE são perpendiculares.

Prove que o produto $CE * ED$ atinge seu máximo, a medida que D varia, precisamente quando B, O, E e D estão numa circunferência.

Solução

Vamos identificar a posição de D de tal modo que os pontos sejam cíclicos. Para isso, podemos usar os teoremas dos quadriláteros cíclicos.

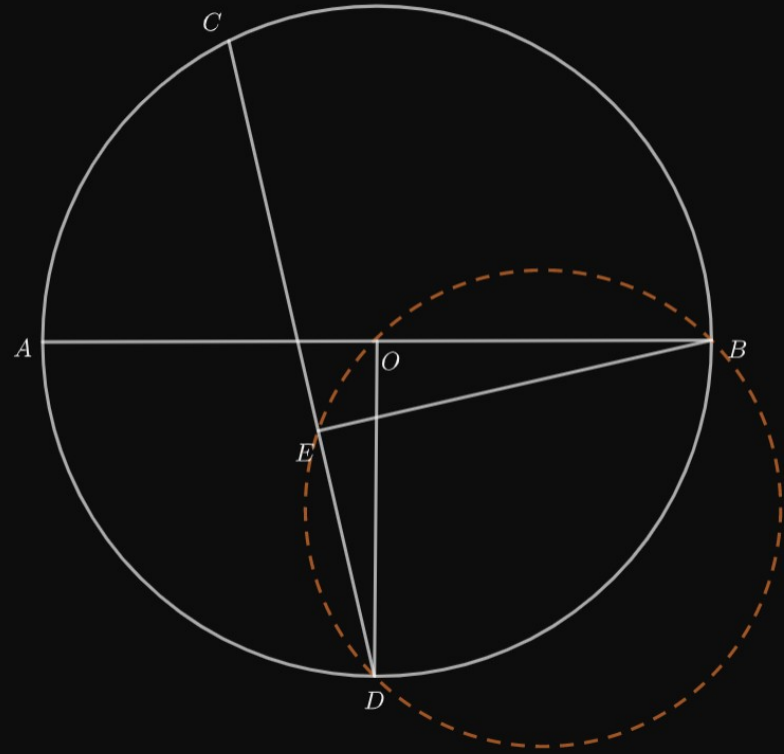
Repare que se DO for perpendicular a AB, isto acontece.

Afirmação 1: Se DO for perpendicular a AB, então B, O, E e D estão numa circunferência.

Solução

Vamos identificar a posição de D de tal modo que os pontos sejam cíclicos. Para isso, podemos usar os teoremas dos quadriláteros cíclicos.

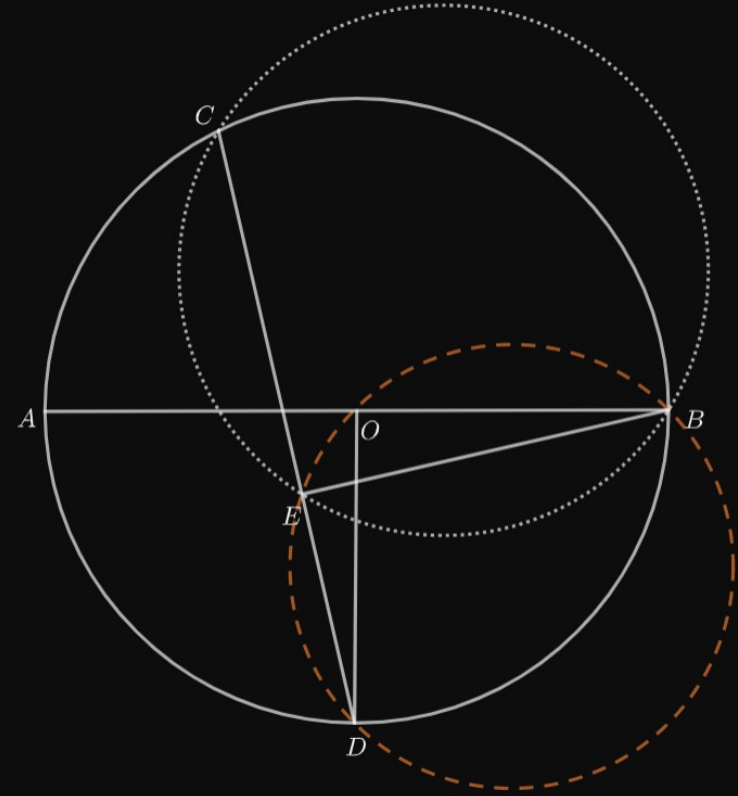
Repare que se DO for perpendicular a AB, isto acontece.

Afirmação 1: Se DO for perpendicular a AB, então B, O, E e D estão numa circunferência.

Prova: Como $\angle DOB = \angle DEB = 90^{\underline{o}}$, pelo teorema do quadrilátero cíclico, EOBD é um quadrilátero cíclico $\square$

Solução

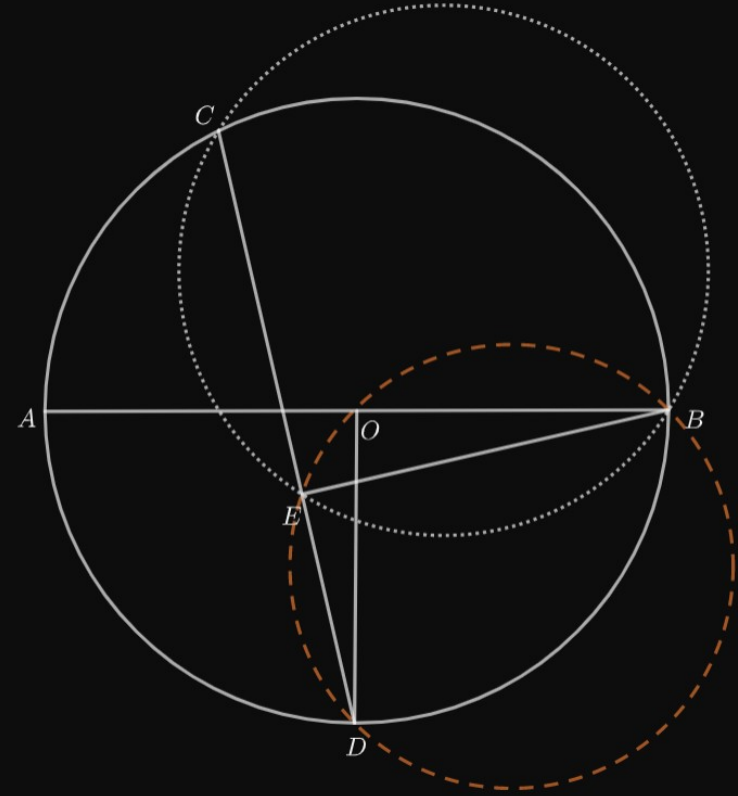
Afirmação 1: Se DO for perpendicular a AB, então B, O, E e D estão numa circunferência.

Vamos determinar os espaço geométrico de E. Como $\angle CEB = 90^{\circ}$, então podemos afirmar que o espaço geométrico de E é a circunferência de diâmetro CB.

Repare que uma breve vista no diagrama permite conjeturar que E é mais próximo de O quando DO é perpendicular a AB. Além disso o produto CE*ED está relacionado com a potência de ponto. Portanto, temos aqui duas conjeturas interessantes.

Solução

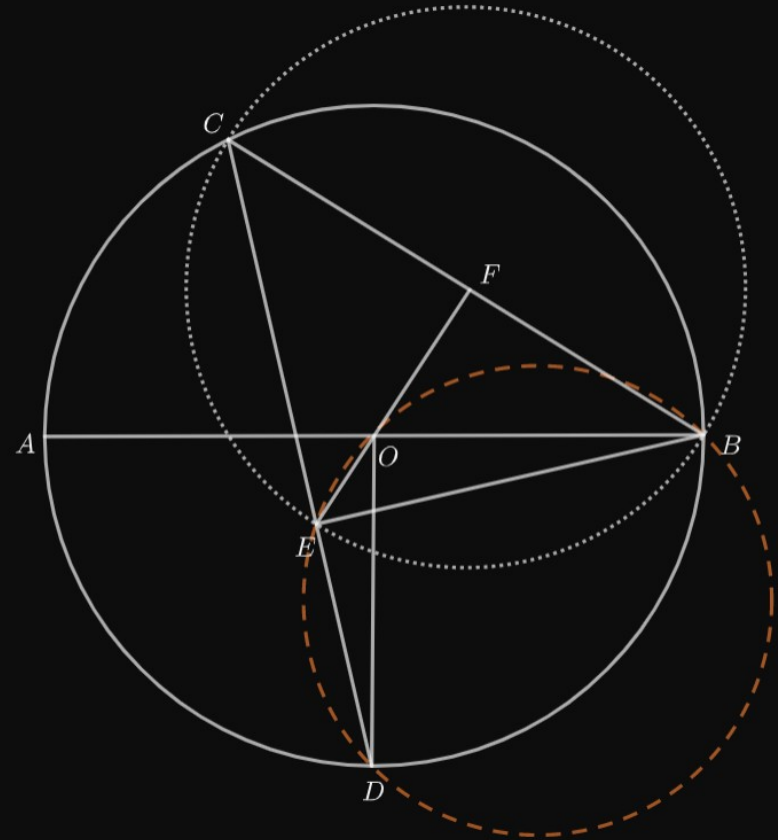
Afirmação 1: Se DO for perpendicular a AB, então B, O, E e D estão numa circunferência.

Conjetura 1: Se DO for perpendicular a AB, então E está mais próximo de O relativamente aos pontos do seu espaço geométrico.

Conjetura 2: Quanto mais próximo um ponto P estiver do centro da circunferência, maior vai ser o valor da potência de ponto de P.

Solução

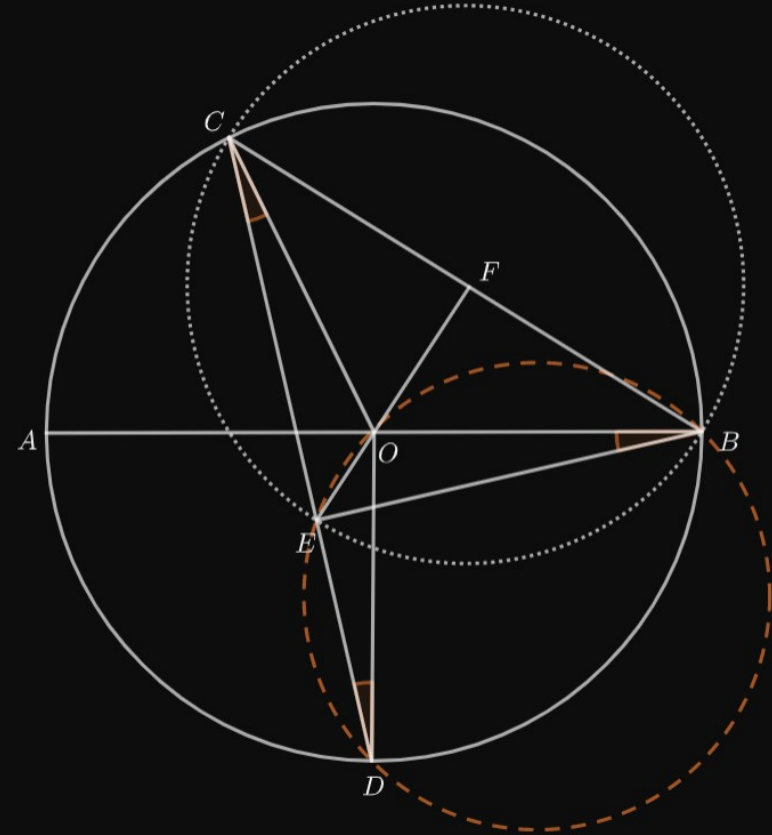
Afirmação 2: Se DO for perpendicular a AB, então E está mais próximo de O relativamente aos pontos do seu espaço geométrico.

Prova: Seja F o ponto médio de CB.
Pela lei dos cossenos:
$OE^2 = OF^2 + FE^2 - 2*OF*FE*\cos(\angle OFE)$

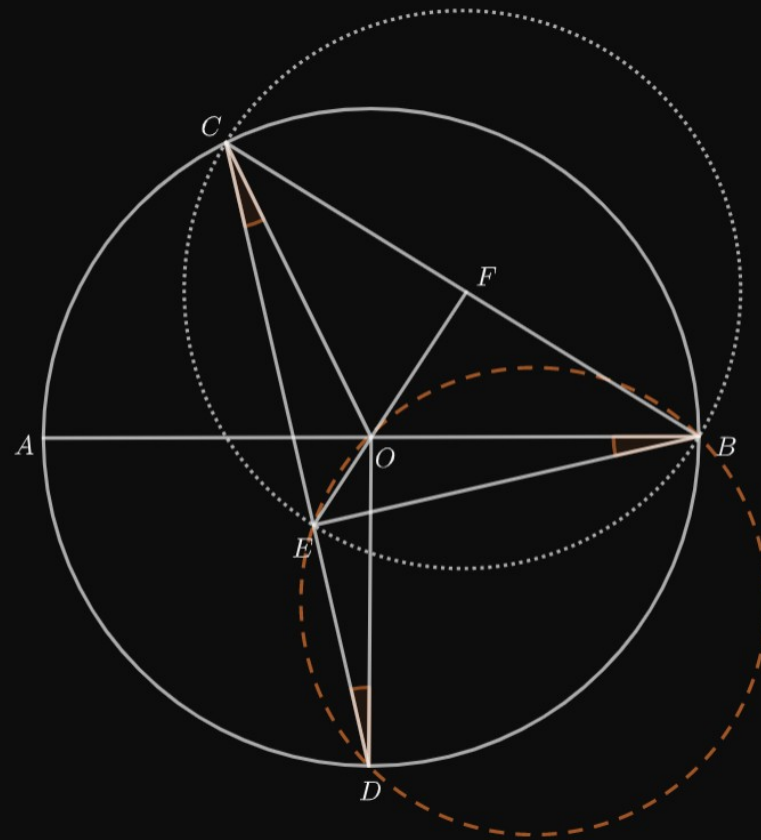
OE^2 é mínimo quando $\angle OFE = 0$, ou seja, quando E, O e F são colineares.

Solução

Afirmação 2: Se DO for perpendicular a AB, então E está mais próximo de O relativamente aos pontos do seu espaço geométrico.

Prova: Seja F o ponto médio de CB.
Pela lei dos cossenos:
$OE^2 = OF^2 + FE^2 - 2*OF*FE*\cos(\angle OFE)$

OE^2 é mínimo quando $\angle OFE = 0$, ou seja, quando E, O e F são colineares.
Provemos agora que E, O e F são colineares.
Pelo teorema do ângulo inscrito, $\angle DCB = \angle DOB/2 = 90/2 = 45$. Como consequência, CE = EB e E pertence à mediatriz do segmento CB.
Repare que $\angle EDO = \angle EBO = \angle ECD$, consequentemente resulta que CO = OB e assim O pertence a mediatriz do segmento CB. □

Solução

Afirmação 3: Quanto mais próximo um ponto P estiver do centro da circunferência, maior vai ser o valor da potência de ponto de P

Fica como exercício ao leitor.

Solução

Afirmação 1: Se DO for perpendicular a AB, então B, O, E e D estão numa circunferência.

Afirmação 2: Se DO for perpendicular a AB, então E está mais próximo de O relativamente aos pontos do seu espaço geométrico.

Afirmação 3: Quanto mais próximo um ponto P estiver do centro da circunferência, maior vai ser o valor da potência de ponto de P.

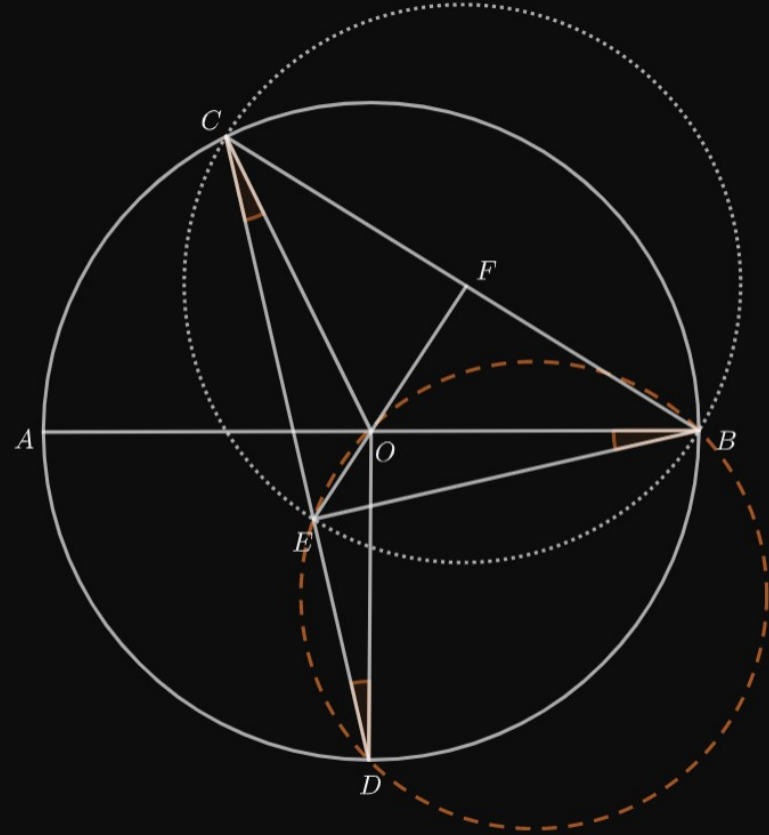
Assim, pela afirmação 2 e 3, CE*ED é máximo quando DO é perpendicular a AB, mas também pela afirmação 1, B, O, E e D estão numa circunferência, e assim está mostrado. □

Solução

Diagrama no GeoGebra: https://www.geogebra.org/calculator/xtvc5gz5